# TEMA 4 DETERMINANTES

## 4.0 DETERMINANTES

Por falta de tiempo solo se desarrollara de forma intuitiva

**CONCEPTOS NECESARIOS**:

$S = \{1,\ldots,n\}$; $S_n = \{\sigma : S \to S \,/\, \sigma \text{ biyectiva}\}$

$(S_n, o)$ **grupo de las permutaciones** ( o sustituciones) de orden $n$, $ordS_n = n!$

Notación: $\sigma = \begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & a_{i_3} & & a_{i_n} \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \end{pmatrix}$, donde $\begin{cases} \sigma(a_k) = a_{i_k}, \ k = 1,\ldots,n \\ \{i_1,\ldots,i_n\} = \{1,\ldots,n\} \end{cases}$

Ejemplo: $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

**Nº DE INVERSIONES DE UNA SUSTIUCIÓN**: Sean $S = \{1,\ldots,n\}$ y $\sigma \in S_n$.

$\sigma$ proporciona una **nueva ordenación** para los elementos de $S$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots\ldots & \sigma(i) & \ldots\ldots & \sigma(j) & \ldots\ldots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & i & \ldots\ldots & j & \ldots\ldots & n \end{pmatrix}$$

$\sigma(i)$ y $\sigma(j)$ forman una **inversión** si siendo $i < j$ es $\sigma(i) > \sigma(j)$

$I(\sigma)$ :**nº total de inversiones** que presentan entre si los elementos de una permutación $\sigma$

Si $I(\sigma)$ es **par** se dice que $\sigma$ es **par**

Si $I(\sigma)$ es **impar** si dice que $\sigma$ es **impar**

El **nº de permutaciones pares** es igual el **nº de permutaciones impares** e igual a $\frac{n!}{2}$

**SIGNATURA DE UNA SUSTITUCIÓN**:

La **signatura** es una aplicación definida de la forma:

$$\begin{array}{cccc} \varepsilon : & S_n & \to & \{-1,1\} \\ & \sigma & \to & \epsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)} = \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma \text{ es par} \\ -1, & \text{si } \sigma \text{ es impar} \end{cases} \end{array}$$

**EJEMPLOS**:**1**) $S = \{1,2\}$. Obtener: $S_2$. **2**) $S = \{1,2,3\}$. Obtener: $S_3$.

**DEFINICIÓN**: Sean $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; $S_n$ permutaciones de $\{1,\ldots,n\}$.

$$\boxed{\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}} = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n}$$

Notación: $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$

**OBSERVACIONES**:

1) ¿nº de sumandos precedidos de signo ”+” ?¿precedidos de signo ”-” ?

2) ¿En algún sumando hay más de un elemento de alguna fila ?¿columna?

## $\boxed{4.1}$ DETERMINANTES

**CASOS PARTICULARES**:(Reglas de cálculo en el caso 2×2 y 3×3)

Sea el sistema $A\mathbf{X} = \mathbf{B}$; $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}$ con $A$ invertible

Como $\left\{ \begin{array}{l} a_{11}\mathbf{x}_1 + a_{12}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_1 \\ a_{21}\mathbf{x}_1 + a_{22}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{l} a_{21}a_{11}\mathbf{x}_1 + a_{21}a_{12}\mathbf{x}_2 = a_{21}\mathbf{b}_1 \\ a_{11}a_{21}\mathbf{x}_1 + a_{11}a_{22}\mathbf{x}_2 = a_{11}\mathbf{b}_2 \end{array} \right. \underset{E_2\to E_2-E_1}{\sim}$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{21}a_{11}\mathbf{x}_1 + a_{21}a_{12}\mathbf{x}_2 = a_{21}\mathbf{b}_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\mathbf{x}_2 = a_{11}\mathbf{b}_2 - a_{21}\mathbf{b}_1 \end{array} \right. \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \frac{a_{11}\mathbf{b}_2 - a_{21}\mathbf{b}_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{\mathbf{b}_1} \\ a_{21} & \boxed{\mathbf{b}_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Analogamente $\mathbf{x}_1 = \frac{a_{22}\mathbf{b}_1 - a_{12}\mathbf{b}_2}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{\mathbf{b}_1} & a_{12} \\ \boxed{\mathbf{b}_2} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$

**DETERMINANTES DE MATRICES 2x2 Y 3x3**

1) **Matrices** $(2 \times 2)$ $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ $\boxed{\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

$$\begin{array}{c} + \qquad - \\ \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} \\ - \qquad + \end{array}$$

2) **Matrices** $(3 \times 3)$ $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ **Regla de Sarrus**

$$\det A = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}_{(+)} - \underbrace{a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}_{(-)}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\bullet} & \underline{\underline{\bullet}} & \bullet^{\cdot} \\ \bullet^{\cdot} & \boxed{\bullet} & \underline{\underline{\bullet}} \\ \underline{\underline{\bullet}} & \bullet^{\cdot} & \boxed{\bullet} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \underline{\underline{\bullet}} & \bullet^{\cdot} & \boxed{\bullet} \\ \bullet^{\cdot} & \boxed{\bullet} & \underline{\underline{\bullet}} \\ \boxed{\bullet} & \underline{\underline{\bullet}} & \bullet^{\cdot} \end{pmatrix}$$

$$\underset{(+)}{\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}} \qquad \underset{(-)}{\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}}$$

## DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA LINEA.

**DEFINICIÓN**: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

**Menor complementario del elemento $a_{ij}$ ($M_{ij}$) de A**, es el determinante de la matriz de orden $n-1$ que si obtiene suprimiendo la fila i-ésima y la columna j-ésima de la matriz $A$.

**Adjunto de $a_{ij}$** : $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

**EJEMPLO**:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 10 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -10$$

**PROPOSICIÓN**: Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

**Desarrollo por los elementos de la columna j-ésima** :

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots\ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$

**Desarrollo por los elementos de la fila i-ésima** :

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots\ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

E**JEMPLO 1**: 1) Calcular los determinantes:Hoja **4.1**

$$1\_v) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 1\_vi) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 7 & 5 \end{vmatrix} \quad 1\_vii) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & -6 & -3 \\ 3 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

E**JEMPLO 2**: Calcular

$$2A) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad 2B) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Problema 1v) de la hoja de problemas 4.1

1v) $\boxed{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}$ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \boxed{-1} & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 2 & 1 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & -1 & \boxed{0} & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$\overbrace{+(0)\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}^{0} + \overbrace{(0)\times(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}^{0}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & \boxed{0} & 1 \\ 2 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & \boxed{0} \\ 2 & 1 & \boxed{0} \\ 0 & -1 & \boxed{1} \end{vmatrix} =$$

$$= -\left[ (0)\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (1)\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right]$$

$$- \left[ (0)\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (0)\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (1)\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right]$$

$$= -[0 + 1 + (-2)] - [0 + 0 + 0] = 1$$

EJEMPLO 2: Calcular

$$2A)\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_n$$

Por inducción

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

Supongamos se cumple

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{(n-1)(n-1)}$$

Entonces

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \dots & \boxed{0} & \boxed{a_{nn}} \end{vmatrix} = a_{nn} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$= a_{nn} \times (a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{(n-1)(n-1)}) = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{(n-1)(n-1)}a_{nn}$$

$2B)$ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, determinant: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -34$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 7 \\ \boxed{0} & \boxed{-2} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \overbrace{(0) \times (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}}^{0} + (-2) \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 2 & \boxed{-1} & 7 \\ 1 & \boxed{0} & 1 \\ 1 & \boxed{2} & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (1) \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} \boxed{2} & 1 & 7 \\ \boxed{1} & 3 & 1 \\ \boxed{1} & 7 & 1 \end{vmatrix} + (1) \times (-1)^{2+4} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & \boxed{-1} \\ 1 & 3 & \boxed{0} \\ 1 & 7 & \boxed{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \overbrace{0} - 2\left[ (-1) \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (0) \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (2) \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right] +$$

$$- \left[ (2) \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + (1) \times (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + (1) \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right]$$

$$+ \left[ (-1) \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + (0) \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + (2) \times (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= -\overbrace{0} - 2 \times (0 + 0 + 10) - (2 \times (-4) - (-48) + (-20)) + ((-1) \times 4 + 0 + 2 \times 5) =$$

$$= +0 - 20 - 20 + 6 = -34$$

**PROPIEDADES**: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

**1**) $\det A = \det A^T$

.......................................................................................

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$

---

**2**) Si $A'$ se obtiene a partir de $A$ permutando dos lineas entre si: $\det A' = -\det A$

.......................................................................................

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2 = (-1) \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

---

**3**) (análogamente para filas)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & \mathbf{b}_{1i}+\mathbf{c}_{1i} & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & \mathbf{b}_{ni}+\mathbf{c}_{ni} & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & \mathbf{b}_{1i} & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & \mathbf{b}_{ni} & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & \mathbf{c}_{1i} & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & \mathbf{c}_{ni} & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

.......................................................................................................................

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 2+6 & 3 \\ 4-2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 34 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -2 + 36$

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 2-3 & 3+4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -33 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2 - 31$

---

**4**) (análogamente para filas)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & \lambda\mathbf{a}_{1i} & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & \lambda\mathbf{a}_{ni} & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & \mathbf{a}_{1i} & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & \mathbf{a}_{ni} & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 2\times 3 & 3 \\ 4\times 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 5 \end{vmatrix} = -6 = 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times (10 - 12)$

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 2\times 4 & 3\times 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -8 = 4 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 4 \times (-2)$

**5**) $\det A = 0 \Leftrightarrow$ sus filas (ó columnas ) constituyen un sistema de vectores l.d.

Por tanto : $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0;$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1i} & \dots & a_{i-1n} \\ \lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_{n-1} a_{n-11} & \dots & \lambda_1 a_{1i} + \dots + \lambda_{n-1} a_{n-1i} & \dots & \lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_{n-1} a_{n-1n-1} \end{vmatrix} = 0$$

.................................................................................................................................

EJEMPLOS : $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0,$

$$= -2 = \begin{vmatrix} 2+4 & 3+5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2 + 0$$

---

**6**) Si $A'$ se obtiene a partir $A$ sumando a una linea una combinación lineal del resto se tiene: $\det A' = \det A$

EJEMPLO: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4$

$$\begin{vmatrix} 2+2\times 3-4 & 3 & 4 \\ 4+2\times 5-6 & 5 & 6 \\ 1+2\times 1-3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\times \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\times \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -4 + 2\times 0 + (-1)\times 0 = -4$$

---

**CONSECUENCIA**: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

..........................................

EJEMPLO: $\begin{pmatrix} 2\times 3 & 3\times 3 \\ 4\times 3 & 5\times 3 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2\times 3 & 3\times 3 \\ 4\times 3 & 5\times 3 \end{vmatrix} = -18 = 3^2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2\times 3 & 3\times 3 \\ 4\times 3 & 5\times 3 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 3\times 3 \\ 4 & 5\times 3 \end{vmatrix} = 3\times 3\times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3^2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

---

2) $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$

.....................................................................

EJEMPLO: $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} = (-1) \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

.....................................................................

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -4 & -5 & -6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = (-1) \times \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -4 & -5 & -6 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -5 & -6 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)\times(-1)\times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

---

3) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

.......................................................................................

EJEMPLO:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; \ A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 19 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| \times |B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\times(-11) = 22$$

$$|A \times B| = \begin{vmatrix} 11 & 0 \\ 19 & 2 \end{vmatrix} = 22$$

4) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$sus filas (columnas ) constituyen un sistema de vectores l.i.$\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow rangA = n \Leftrightarrow A$ es regular

.........................................................................................................

EJEMPLO :

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0,$ observemos que en las filas $F_2 = 3F_1$

En el e.v. el conjunto de vectores $\{(2,3),(6,9)\}$ es l.d.

---

EJEMPLO :

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0,$

observemos que las filas $F_1$ y $F_2$ una no es c.l. una de otra
En el e.v. el conjunto de vectores $\{(2,3),(6,4)\}$ es l.i.

EJEMPLO :

$\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 0,$ observemos que en las columnas $C_2 = 4C_1$

En el e.v. el conjunto de vectores $\{(2,3),(8,12)\}$ es l.d.

---

EJEMPLO :

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 21 \neq 0,$

observemos que las columlas $C_1$ y $C_2$ una no es c.l. una de otra
En el e.v. el conjunto de vectores $\{(2,3),(1,12)\}$ es l.i.

---

**EJEMPLO 2**: Calcular

2) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11}a_{22}\dots a_{(n-2)(n-2)} \begin{vmatrix} a_{(n-1)n} & a_{(n-1)n} \\ 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$= a_{11}a_{22}\dots a_{(n-2)(n-2)}a_{(n-1)n}a_{nn}$$

## ALGUNOS MÉTODOS PARA EL CÁLCULO DE DETERMINANTES

**I**) **Determinantes de 2º y 3º orden.Regla de Sarrus**.

(Estudiado en hoja 2)

**II**) **Desarrollo de un determinante por los elementos de una linea**.

(Estudiado en hoja 3)

**III**) **Regla de Chio**(**elemento pivote**).

Reduce el cálculo de un determinante de orden $n$ a un determinante de orde $n-1$

Consiste en:

_Fijar una linea y un **elemento pivote** (generalmente un ”1” por comodidad)
_Anular todos los elementos de la linea fijada salvo el pivote, utilizando las propiedades de los determinantes.
_ Desarrollar el determinante por los elemetos de la linea fijada

**IV**) **Por triangulación**. Consiste en:

_Convertir el determinante original a uno triangular. (utilizando las propiedades de los determinantes)
_Multiplicar los elementos de la diagonal principal.

**EJEMPLO 1** : Hoja 1.1

$$1\_v)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 1\_vi)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 7 & 5 \end{vmatrix} \quad 1\_vii)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & -6 & -3 \\ 3 & 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$iv)\ \begin{vmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -4 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -4 \end{vmatrix} = (-1)^3 \times 2^3 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1}}{=} (-8) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= (-8) \times \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = (-8) \times (7-25) = 144$$

$$1)\quad vi)\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 + F_1 \\ F_4 \to F_4 - 3F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 10 & -9 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 10 & -9 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{F_2 \to F_2 + 2F_1 \\ F_3 \to F_3 + 10F_1}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 21 & 18 \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 21 & 18 \end{vmatrix} = 39$$

$$vii)\ \begin{vmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 6 & 12 & 18 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-2) \times 6 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

## $\boxed{4.2}$ APLICACIONES

### 4.2.1 MATRIZ INVERSA DE UNA MATRIZ REGULAR

PROPOSICIÓN: Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

$A$ regular $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

En ese caso : $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

---

EJEMPLO:Obtener $A^{-1}$. $$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Obtención del determinante de la matriz A por el desarrollo de los elementos de la 1ª columna

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 1 \\ \boxed{0} & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}(-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + ((-1)^{2+2}\times 0) = 1 + 1 = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Puede resultar más comodo obtener

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 1 \\ \boxed{0} & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}(-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + ((-1)^{2+2}\times 0) = 1 + 1 = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -|1| & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

## 4.2.2| RANGO DE UNA MATRIZ

**DEFINICIÓN**: **Menor de una matriz** $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$

son los determinantes de sus submatrices cuadradas.

EJEMPLO $A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; $A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{2} & 1 \\ \boxed{6} & \boxed{4} & 2 \end{pmatrix}$; $A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & \boxed{1} \\ \boxed{6} & 4 & \boxed{2} \end{pmatrix}$

Son menores de $A_1$ $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$

**EJEMPLOS** Son menores de $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 5 & 10 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} -2 & 1 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 10 & -5 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

**DEFINICIÓN**: **Rango de una matriz** $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$

es el mayor de los órdenes de sus menores no nulos.

**EJEMPLOS**: Obtener el rango de las matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{2} & 1 \\ \boxed{6} & \boxed{4} & 2 \end{pmatrix}; \quad A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & \boxed{1} \\ \boxed{6} & 4 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

$M_{11} = 3;$ $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0;$ $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$ Por tanto $rgA_1 = 1$

$$rgA_1 = rg\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

---

$$A_2 = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{2} & 1 \\ \boxed{6} & \boxed{4} & 1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & \boxed{1} \\ \boxed{6} & 4 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$M_{11} = 3;$ $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0;$ $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq o$ Por tanto $rgA_2 = 2$

$$,A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}, rgA_2 = rg\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

**Obtención del rango de una matriz** :

Se verifica:

1) Si todos los menores de orden h de una matriz son nulos , lo son también los de orden h+1

2)Si en una matriz se suprime una linea combinación lineal de otras paralelas se obtiene una matriz del mismo rango que la inicial.

$$\text{EJEMPLO } rgA = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & 8 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{array}$$

$$a_{11} = 1 \neq 0; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow rgA \geq 2$$

Tode los menoes de orden 3 son nulos

$$\begin{array}{c} \boxed{F_1} \\ \boxed{F_2} \\ \boxed{F_3} \end{array} \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & 3 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & 6 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & -2 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{c} \boxed{F_1} \\ \boxed{F_2} \\ \boxed{F_4} \end{array} \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & 3 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & 6 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & -2 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & -3 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto cualquier menor de orden superior también lo es.

Por tanto $rgA = 2$

Comprobamos que efectivamente es así

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 5 & 10 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{\textbf{EJ}}\; rgA = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 5 & 10 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; rgA = \ldots = rg\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & 9 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\text{EJEMPLO } : A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \ rgA_1 = rg\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} = rgA_1\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{EJEMPLO } :, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}, rgA_2 = rg\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

## 4.2.3 RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

( **Regla de Cramer**)

Un **sistema** de ecuaciones lineales $\mathbf{S} : \mathbf{AX} = \mathbf{B}$ es **de Cramer** si:

$\mathbf{A}$ es **cuadrada** y **regular** ( **det(A)**$\neq 0$ )

**Regla de Cramer**: Consideremos el siguiente sistema de Cramer:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Todo sistema de Cramer tiene una única solución

$$x_i = \frac{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccccc} & & \boxed{\text{i}} & & \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \boxed{b_1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \boxed{b_n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}, \quad i = 1, \dots, n$$

EJEMPLO :Resolver el sistema:
$$\left.\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 1 \\ -x + 5y + z &= 4 \\ 3x - 2y - 4z &= -1 \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 \\ \boxed{4} & 5 & 1 \\ \boxed{-1} & -2 & -4 \end{vmatrix}}{\det A} = 21; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \boxed{1} & -3 \\ -1 & \boxed{4} & 1 \\ 3 & \boxed{-1} & -4 \end{vmatrix}}{\det A} = 2; x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & \boxed{1} \\ -1 & 5 & \boxed{4} \\ 3 & -2 & \boxed{-1} \end{vmatrix}}{\det A} = 15$$

### 4.2.4 DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES

Sea $\bar{a}_i = (a_{i1},\ldots\ldots,a_{in}) \in \mathbb{R}^n$

$\{\bar{a}_1,\ldots\ldots,\bar{a}_n\}$ son l.d. $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$

**EJEMPLO**:Estudiar la dependencia e independencia lineal de los siguientes sistemas de vectores de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\mathbf{1}}$) $\{(2,1,3),(1,1,1),(4,3,5)\}$ son l.d.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$F_4 = 2F_1 + F_2$

$\boxed{\mathbf{2}}$) $\{(2,1,3),(1,1,1),(4,2,5)\}$ son l.i.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

### 4.2.5 OBTENCIÓN DE ECUACIONES IMPLICITAS

$\mathcal{U} = \mathcal{L}(\bar{a},\bar{b})$ ; $\{\bar{a},\bar{b}\}$ l.i. $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$

Ec. paramétricas de $\mathcal{U}$: $\begin{cases} x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \lambda a_n + \mu b_n \end{cases}$

$\bar{x} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{\bar{x},\bar{a},\bar{b}\}$ l.d.$\Leftrightarrow rang \begin{pmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & a_n & b_n \end{pmatrix} = 2$

$\Leftrightarrow$ Todos los menores de orden 3 deben ser nulos, es decir,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_4 & a_4 & b_4 \end{vmatrix} = 0 \\ \ldots\ldots \\ \begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_n & a_n & b_n \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

suponemos $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

**EJEMPLOS**:Obtener unas ecuaciones implicitas de los siguientes s.v. de $\mathbb{R}^4$

$$1)\mathcal{U} = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\right),\ rg\begin{pmatrix}\boxed{1}&\boxed{1}\\\boxed{1}&\boxed{0}\\1&1\\1&0\end{pmatrix} = 2$$

---

$$\begin{vmatrix}\boxed{1}&\boxed{1}\\\boxed{-1}&\boxed{0}\end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\\1&1\\1&0\end{pmatrix} = 2$$

$$rg\begin{pmatrix}x_1&1&1\\x_2&-1&0\\x_3&1&1\\x_4&1&0\end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{vmatrix}x_1&\boxed{1}&\boxed{1}\\x_2&\boxed{-1}&\boxed{0}\\x_3&1&1\end{vmatrix} = 0\\\begin{vmatrix}x_1&\boxed{1}&\boxed{1}\\x_2&\boxed{-1}&\boxed{0}\\x_4&1&0\end{vmatrix} = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\begin{vmatrix}x_1&1&1\\x_2&-1&0\\x_3-x_1&0&0\end{vmatrix} = 0\\\begin{vmatrix}x_1&1&1\\x_2&-1&0\\x_4+x_2&0&0\end{vmatrix} = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x_3 - x_1 = 0\\x_4 + x_2 = 0\end{array}\right.$$ son unas ecuaciones implicitas de $\mathcal{U}$

---

2) $\mathcal{V} = \mathcal{L}\left(\left\{\underset{\bar{a}_1}{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}}, \underset{\bar{a}_2}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{\bar{a}_3}{\begin{pmatrix}5\\-3\\5\\3\end{pmatrix}}\right\}\right)$

.................................................................

$$\begin{vmatrix}\boxed{1} & \boxed{1}\\ \boxed{-1} & \boxed{0}\end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow rg\begin{pmatrix}\boxed{1} & \boxed{1} & 5\\ \boxed{-1} & \boxed{0} & -3\\ 1 & 1 & 5\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix} \geq 2$$

$$\begin{vmatrix}\boxed{1} & \boxed{1} & 5\\ \boxed{-1} & \boxed{0} & -3\\ 1 & 1 & 5\end{vmatrix} = 0;\ \text{y}\ \begin{vmatrix}\boxed{1} & \boxed{1} & 5\\ \boxed{-1} & \boxed{0} & -3\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix} = 0$$

De donde se deduce que $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ l.d.
y $\bar{a}_3$ es una combinación lineal de $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ sistema l.i.
Por tanto

$$\mathcal{V} = \mathcal{L}\left(\left\{\underset{\bar{a}_1}{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}}, \underset{\bar{a}_2}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{\bar{a}_3}{\begin{pmatrix}5\\-3\\5\\3\end{pmatrix}}\right\}\right) = \mathcal{L}\left(\left\{\underset{\bar{a}_1}{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}}, \underset{\bar{a}_2}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}\right\}\right)$$

Observamos que $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ es elmismo sistema de vectores del ejemplo anterior donde se ha obtenido que unas ecuaciones implicitas de $\mathcal{V}$ son

$$\begin{cases} x_3 - x_1 = 0\\ x_4 + x_2 = 0\end{cases}$$

3) $\mathcal{U} = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$

$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ es l.i.. Observemos que ya estan escalonados.

Además $rg\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$ y $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Debe cumplirse $rg\begin{pmatrix} x_1 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ x_2 & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ x_3 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ x_4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$ y para ello debe cumplirse

$$\begin{vmatrix} x_1 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ x_2 & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ x_3 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ x_4 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ x_2 & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ x_3 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \boxed{x_4+x_2} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x_4 + x_2) \times \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow 3 \times (x_4 + x_2) = 0 \Leftrightarrow x_4 + x_2 = 0$ es la ecuación buscada